

Examen de admitere
Facultatea de Matematică și Informatică
Proba scrisă – **Matematică**
iulie 2024

1. [4 puncte] Derivata funcției $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ are, în fiecare punct $x > 0$, valoarea:

A. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$

B. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$

C. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\ln x}{x^2}$

D. $f'(x) = (x^{\frac{1}{x}}) \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$

E. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}}$

F. f nu este derivabilă pe $(0, \infty)$

Soluție: Ținem seama de egalitatea $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x}$, valabilă pentru orice $x > 0$, și aplicăm regulile de derivare:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} \right)' = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right)' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x) \cdot x'}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

2. [4 puncte] În reperul cartezian xOy se consideră dreapta de ecuație $d : 2x - y = 5$. Dreapta perpendiculară pe dreapta d în punctul $A(1, -3)$ are ecuația:

A. $x + y = -2$

B. $x + 2y = 5$

C. $x + 2y = -5$

D. $x - 2y = 7$

E. $\frac{x}{2} + y = \frac{5}{2}$

F. $\frac{-x}{2} + y = \frac{5}{2}$

Soluție: O dreaptă perpendiculară pe dreapta d are ecuația $x + 2y = C$. Constanta C se determină punând condiția ca punctul A să aparțină dreptei, de unde rezultă că punctul C are valoarea -5 .

3. [5 puncte] Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + 5x^3 - 3x^2 - 3x}{x^2(x+1)^2}$ este:

- A. 0
- B. ∞
- C. -3**
- D. 3
- E. 1
- F. nu există

Soluție: Folosind proprietățile limitelor, avem:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + 5x^3 - 3x^2 - 3x}{x^2(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \left(5x - 3 - \frac{3x - \sin(3x)}{x^2} \right) = \\ &= 1 \cdot \left(0 - 3 - 9 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \frac{y - \sin(y)}{y^3} \right) = -3 - 9 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} = -3. \end{aligned}$$

(Am notat $y = 3x$ și am calculat, folosind regula lui l'Hôpital,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin(y)}{y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(y)}{3y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{6y} = \frac{1}{6}.)$$

4. [5 puncte] Fie sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 5 \\ x + 2y - 4z = -6 \\ ax - 3y + 2z = 1. \end{cases}$$

Care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată?

- A. Sistemul este incompatibil pentru orice valoare a lui a
- B. Sistemul este compatibil nedeterminat pentru orice $a \in \mathbb{R}$
- C. Când sistemul este compatibil determinat, soluția sa depinde de a
- D. Există o valoare a pentru care sistemul este incompatibil
- E. Sistemul este compatibil determinat pentru $a \neq 2$**
- F. Sistemul este compatibil determinat pentru orice $a > 0$

Soluție: Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ a & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculând $\det(A) = 8(2-a)$, se poate observa că sistemul este compatibil determinat pentru $a \neq 2$. Astfel, afirmația E este adevărată, iar A, B și F sunt false. Pentru $a \neq 2$, soluția sistemului este $x = 0, y = 1, z = 2$, deci C este falsă, iar dacă $a = 2$, sistemul este compatibil nedeterminat, soluția acestuia fiind $y = \frac{5x}{4} + 1, z = \frac{7x}{8} + 2$, deci afirmația D este falsă.

5. [5 puncte] Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x + \cos(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n^2}$ este:
- A. 0
- B. ∞
- C. $\frac{1}{2}$**
- D. 1
- E. $\frac{1}{4}$
- F. nu există

Soluție: Avem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1) + \cos(2) + \dots + \cos(n)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} + 0 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

deoarece

$$-\frac{1}{n} = \frac{-n}{n^2} < \frac{\cos(1) + \cos(2) + \dots + \cos(n)}{n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

6. [5 puncte] Considerăm un punct M pe segmentul $[AB]$ de lungime 20 cm . Atunci cea mai mică valoare, în cm^2 , a sumei ariilor cercurilor de diametre $[AM]$ și $[BM]$ este:
- A. 200
- B. 300
- C. 40π
- D. 50π**
- E. 60π
- F. 70π

Soluție: Soluția 1 Notăm lungimea segmentului $[AM]$ cu x . Atunci suma ariilor cercurilor este $\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi(20-x)^2}{4} = \frac{\pi}{2}((x-10)^2 + 100)$ care are minimumul 50π când $x = 10$.

Soluția 2 Suma ariilor este $\frac{\pi}{4} \cdot (AM^2 + BM^2) = \frac{\pi}{8} \cdot ((AM+BM)^2 + (AM-BM)^2) = \frac{\pi}{8} \cdot (AB^2 + (AM-BM)^2) \geq \frac{\pi}{8} \cdot AB^2 = 50\pi \text{ cm}^2$, cu egalitate dacă și numai dacă $AM = BM = \frac{1}{2} \cdot AB = 10 \text{ cm}$.

7. [4 puncte] Mulțimea soluțiilor din intervalul $[0, 2\pi)$ ale ecuației $\sin(2x) + \sin(x) = 0$ este:
- A. $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$
- B. $x \in \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\}$
- C. $x \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\}$**
- D. $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$
- E. $x \in \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$
- F. $x \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

Soluție: Deoarece $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, ecuația devine:

$$2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = 0 \iff \sin(x)(2\cos(x) + 1) = 0.$$

Avem două cazuri:

Cazul 1: $\sin(x) = 0$, deci $x \in \{0, \pi\}$, sau

Cazul 2: $2\cos(x) + 1 = 0$, sau echivalent $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, deci $x \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$.

8. [5 puncte] Mulțimea soluțiilor inecuației $2e^{2x} - 5e^x + 2 \leq 0$ este:

A. $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

B. $[0, 2]$

C. $[0, \ln(2)]$

D. $[-\ln(2), \ln(2)]$

E. $(-\infty, \ln(2)] \cup [2, \infty)$

F. $[0, \ln(2)] \cup [2, \infty)$

Soluție: Rescriem inecuația sub forma unei inecuații de gradul al doilea în raport cu $y = e^x$:

$$2y^2 - 5y + 2 \leq 0 \iff (y - 2)(2y - 1) \leq 0 \iff \frac{1}{2} \leq y \leq 2.$$

Revenim la x și folosim monotonia funcției logaritmice:

$$\frac{1}{2} \leq e^x \leq 2 \iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq x \leq \ln(2) \iff -\ln(2) \leq x \leq \ln(2).$$

9. [4 puncte] Mulțimea tuturor numerelor complexe $z \in \mathbb{C}$ care verifică egalitatea

$$|z + 2i|^2 + |z - 2i|^2 = 2|z|^2 + 8$$

este:

A. $\mathbb{C}$

B. $\{1\}$

C. $\{0, 1, i\}$

D. $\emptyset$

E. $\{2i, -2i\}$

F. $\{1, -1, 2i, -2i\}$

Soluție: Soluția 1 Considerăm $z = a + ib$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$|z + 2i|^2 = |a + i(b + 2)|^2 = a^2 + (b + 2)^2$$

$$|z - 2i|^2 = |a + i(b - 2)|^2 = a^2 + (b - 2)^2$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

Substituind în egalitate, obținem:

$$a^2 + (b + 2)^2 + a^2 + (b - 2)^2 = 2(a^2 + b^2) + 8$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4b + 4 + a^2 + b^2 - 4b + 4 = 2a^2 + 2b^2 + 8$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 8 = 2a^2 + 2b^2 + 8,$$

ceea ce reprezintă o identitate adevărată pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

În concluzie, egalitatea este verificată pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Soluția 2 Cu identitatea paralelogramului $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$, valabilă pentru toate numerele complexe z și w , înlocuind $w = 2i$, obținem că egalitatea din enunț are loc pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

10. [4 puncte] Fie $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Dacă $\text{rang}(AB) = 1$, atunci $\frac{a}{b}$ este egal cu:

- A. 4
- B. -4
- C. -1
- D. 1
- E. -3

F. 3

Soluție: Prin calcul direct se obține $AB = \begin{pmatrix} a-b & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Cum $\text{rang}(AB) = 1$, trebuie ca $\det(AB) = 0$, adică $3(a-b) - 2a = 0$ și astfel $\frac{a}{b} = 3$.

11. [5 puncte] Numărul matricelor $A \in \mathcal{M}_2(\{0, 1\})$ pentru care suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $AA^\top$ este egală cu 3, este:
- A. 1
 - B. 2
 - C. 3
 - D. 4**
 - E. 5
 - F. 6

Observație: $A^\top$ reprezintă transpusa matricei A .

Soluție: Pentru $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\{0, 1\})$ avem $AA^\top = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$. Cum ecuația $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3$, cu $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, are 4 soluții (a, b, c, d) , numărul de matrice cu proprietatea cerută este 4.

12. [4 puncte] Valoarea integralei $\int_0^2 [x]\{x\} dx$ este:

A. 1

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{1}{2}$

F. 2

Observație: $[x]$, $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

Soluție: Folosind eventual identitatea $\{x\} = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$, obținem:

$$\int_0^2 [x]\{x\} dx = \int_0^1 0 \cdot x dx + \int_1^2 1 \cdot (x - 1) dx = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

13. [5 puncte] Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polinom de grad 4 cu proprietatea că funcția polinomială asociată are valorile $P(0) = P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$ și $P(4) = 16$. Atunci $P(-1)$ este

A. $P(-1) = 0$

B. $P(-1) = 2$

C. $P(-1) = 4$

D. $P(-1) = 6$

E. $P(-1) = 8$

F. $P(-1) = 10$

Soluție: Mulțimea zerourilor polinomului $R = P - X^2$ este $Z(R) = \{1, 2, 3, 4\}$. Deducem că există un număr rațional r cu proprietatea că $R = r(X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$. Cum $R(0) = 1$, obținem că $r = \frac{1}{24}$. Atunci

$$P(-1) = (-1)^2 + R(-1) = 1 + \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{24} = 1 + 5 = 6.$$

14. [5 puncte] Numărul soluțiilor $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ale sistemului

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 6 \end{cases}$$

este:

A. 0

B. 2

C. 4

D. 6

E. 3

F. 1

Soluție: Dacă (x, y, z) este o soluție a sistemului, atunci

$$xy + xz + yz = \frac{1}{2} \left((x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \right) = -3$$

și

$$xyz = \frac{1}{3} \left((x^3 + y^3 + z^3) - (x + y + z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \right) = 2.$$

Folosind relațiile lui Viète obținem că polinomul $P = (t - x)(t - y)(t - z) \in \mathbb{R}[t]$ poate fi rescris sub forma $P = t^3 - 3t - 2$. Rădăcinile acestui polinom fiind $t_1 = t_2 = -1$ și $t_3 = 2$, obținem că mulțimea soluțiilor sistemului dat este $\mathcal{S} = \{(-1, -1, 2), (-1, 2, -1), (2, -1, -1)\}$. Numărul soluțiilor este deci 3.

15. [4 puncte] Dacă $\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, elementul neutru $E \in \mathcal{N}$ pentru operația obișnuită de înmulțire a matricelor pe mulțimea $\mathcal{N}$ este:

A. $E = O_{2 \times 2}$

B. $E = I_2$

C. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $E = e \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

E. $E = \pi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

F. $E = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soluție: Se verifică imediat că dacă $X(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, atunci $X(a) \cdot X(b) = X(2ab)$. Elementul neutru este deci $E = X\left(\frac{1}{2}\right)$.

16. [4 puncte] Derivata funcției $f : \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2x-1}}$ are, în fiecare punct $x > \frac{1}{2}$, valoarea:

A. $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$

B. $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2 \sqrt{2x-1}}$

C. $f'(x) = \frac{x-1}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}$

D. $f'(x) = \frac{x-1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}$

E. $f'(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{2x}$

F. $f'(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{2x-1}}$

Soluție: Aplicând regulile de derivare, obținem:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{2x-1}}} \left(\frac{x^2}{2x-1} \right)' = \frac{x-1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad x > \frac{1}{2}.$$

17. [5 puncte] Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ este:

A. $e - 1 + \ln \frac{1}{1+e}$

B. $e - 1 - \ln \frac{2}{1+e}$

C. $e + 1 + \ln \frac{1}{1+e}$

D. $e + 1 + \ln \frac{2}{1+e}$

E. $e - 1 + \ln \frac{2}{1+e}$

F. $e - 1 - \ln \frac{2}{1-e}$

Soluție: Notăm cu f funcția de sub semnul integral. Se consideră funcția $\varphi : [2, 1+e] \rightarrow [0, 1]$, $\varphi(u) = \ln(u-1)$. Folosim prima formulă de schimbare de variabilă și obținem:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx &= \int_{\varphi(2)}^{\varphi(1+e)} f(x) dx = \int_2^{1+e} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \\ &= \int_2^{1+e} \frac{(u-1)^2}{u} \cdot \frac{1}{u-1} du = \int_2^{1+e} \frac{u-1}{u} du \\ &= u \Big|_2^{1+e} - \ln u \Big|_2^{1+e} = e - 1 + \ln \frac{2}{1+e}. \end{aligned}$$

18. [4 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm dreptele de ecuații $d_1 : 2x - y + 1 = 0$, $d_2 : 2x + y + 1 = 0$, $d_3 : 2x + y - 2 = 0$, $d_4 : 2x - y - 2 = 0$ și $d_5 : 2x - y = 0$. Numărul total de puncte de intersecție ale celor 5 drepte este:

A. 0

B. 2

C. 4

D. 5

E. 6

F. 10

Soluție: Avem dreptele paralele $d_1 \parallel d_4 \parallel d_5$ și $d_2 \parallel d_3$. Cum d_2 intersectează d_1, d_4, d_5 în 3 puncte, iar d_3 intersectează d_1, d_4, d_5 în 3 puncte, numărul punctelor de intersecție este $2 \times 3 = 6$.

19. [5 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm punctele $A(-2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 2)$ și $D(-3, 2)$. Câte din următoarele afirmații sunt adevărate?

- (i) $ABCD$ este paralelogram;
- (ii) $ACBD$ este paralelogram;
- (iii) Triunghiurile ABC și ACD au aceeași arie;
- (iv) Dreptele AB și CD sunt paralele;
- (v) Triunghiurile ABC și ABD au aceeași arie.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. 5

Soluție: Cum segmentele $[AB]$ și $[CD]$ au același mijloc, deducem că $ACBD$ este paralelogram, adică (ii). Rezultă că și afirmațiile (iii) și (v) sunt adevărate. De asemenea, având pante diferite, dreptele AB și CD nu sunt paralele. Prin urmare, (i) și (iv) sunt false.

20. [4 puncte] Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin relațiile $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ dacă $x \neq 1$ și $f(1) = 0$. Să se calculeze valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$.

A. 0

B. limita nu există

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

E. $-\frac{\pi}{2}$

F. niciuna dintre variantele menționate mai sus

Soluție: Funcția f este derivabilă pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, cu derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Trecând la limită pentru $x \rightarrow 1$, obținem valoarea $\frac{1}{2}$.

Numărul total de puncte este: 90